

UNIVERSIDAD DE LA HABANA.

FACULTAD DE FÍSICA.



Rol del campo magnético en los observables astrofísicos de Estrellas de Quarks

TESIS
presentada en opción al grado de
Máster en Ciencias Físicas

Autor: Lic. Daryel Manreza Paret, Facultad de Física.

Tutor: Dra. Aurora Pérez Martínez, ICIMAF.

Ciudad de la Habana. Cuba.

2010

...a mi familia

Resumen

Esta tesis tiene el propósito de estudiar cómo se modifican algunos de los observables astrofísicos de Estrellas de Quarks debido a la presencia del campo magnético.

Para hacerlo, es necesario obtener la *Ecuación de Estado (EdE)* y estudiar la *estabilidad* de la Materia Extraña (formada por quarks u , d y s) magnetizada densa y fría en equilibrio estelar (equilibrio β , conservación del número bariónico y neutralidad de carga). Trabajaremos utilizando el modelo fenomenológico de Bag del MIT.

La *estabilidad* de la Materia Extraña de Quarks Magnetizada (MEQM) se estudia teniendo en cuenta la variación de los parámetros más importantes del modelo: la masa del quark s , la densidad bariónica, el campo magnético y el parámetro de Bag. Los resultados obtenidos se comparan con los de la materia normal de quark magnetizada (sólo quarks u y d en equilibrio β) así como con los de la Materia Extraña de Quarks (MEQ). Se obtiene que la energía por barión decrece con el aumento del campo magnético lo que implica que la MEQM es más estable que la MEQ.

Las *EdE* previamente obtenidas se utilizan para obtener configuraciones estables de Estrellas Extrañas Magnetizadas, comprobando que el campo magnético contribuye a disminuir la relación Masa–Radio (M–R) de la estrella.

Abstract

This thesis aims to study how amending certain astrophysical observable of quark stars due to presence of magnetic field.

To do this we need to obtain Equation of State (EOS) and consider the stability of Strange Quark Matter (made up of quarks u , d and s) cold dense and magnetized in stellar equilibrium (β equilibrium, conservation of the baryonic number and charge neutrality). We will work using the phenomenological MIT Bag model.

The stability of the Magnetized Strange Quark Matter (MSQM) is studies taking into account the variation of parameters from the model: s quark mass, baryonic density, magnetic field and the Bag parameter. Results obtained were compared with those of magnetized normal quark matter (only u and d quarks in β equilibrium) as well as the Strange Quark Matter (SQM). It is found that the energy per baryon decreases with the increasing magnetic field which implies that the MSQM is more stable than SQM.

The Equations of State previously obtained are used to obtain stable configurations of magnetized strange stars checking that the magnetic field helps to reduce Mass–Radius (M–R) ratio of the star.

Índice general

1. Objetos Compactos: Estrellas de Neutrones, Estrellas Extrañas.	5
1.1. Características generales.	5
1.2. Estrellas de Neutrones.	6
1.3. Estrellas de Quarks.	7
1.4. Evidencias observacionales.	8
2. Materia de quarks.	10
2.1. Modelo para describir la materia de quarks.	10
2.1.1. CDC y materia de quarks.	10
2.1.2. Modelo de Bag del MIT.	11
2.2. Hipótesis de la materia extraña de Quarks.	12
2.2.1. Estabilidad de la materia de quarks normal en equilibrio estelar.	13
2.2.2. Estabilidad de la Materia Extraña de Quarks en equilibrio estelar.	14
3. Propiedades termodinámicas de la Materia Extraña de Quarks.	16
3.1. Materia extraña de quarks a $B = 0$ y $T = 0$	16
3.2. Materia Extraña de Quarks Magnetizada a $T = 0$	18
3.2.1. Ecuaciones de estado para la MEQ.	20
3.3. Estabilidad de la materia de quarks magnetizada.	21
4. Estrellas de Quarks magnetizadas.	24
4.1. Observables.	24
4.1.1. Relación Masa Radio y ecuaciones TOV.	24
4.1.2. Masa Bariónica.	26
4.1.3. Corrimiento al rojo gravitacional.	27
Conclusiones.	29
Recomendaciones.	31
Bibliografía.	32

Introducción general.

Los Objetos Compactos (OC) son los remanentes que quedan tras la muerte de una estrella. Dependiendo de sus características se clasifican en Enanas Blancas (EBs), Estrellas de Neutrones (ENs) y Huecos Negros (HN) [1]. En estos objetos, la materia está sujeta a condiciones extremas (altísimas densidades, altas temperaturas y campos magnéticos muy intensos), ello hace que sean considerados laboratorios naturales para probar teorías, que dado el desarrollo tecnológico actual, son imposibles de comprobar en laboratorios terrestres [2].

En una estrella común existen dos fuerzas que se contraponen de forma tal que se llega a un estado de equilibrio mecánico. Estas fuerzas son: la gravitacional, que tiende a comprimir la materia hacia el centro; y la presión ejercida por la radiación desprendida en las reacciones de fusión, que tiende a expulsar materia hacia el exterior de la estrella.

Durante millones de años la estrella quema el combustible nuclear manteniendo un estado de equilibrio, ubicándose en la llamada secuencia principal del diagrama de Hertzsprung–Russell [3]. Cuando en la estrella cesan los procesos de fusión, la gravedad comprime la materia y es la presión del gas degenerado de electrones, en el caso de las EBs; y de neutrones, en el de las ENs, lo que garantiza la estabilidad de la estrella.

La complejidad de Enanas Blancas y ENs requiere que para explicarlas dominemos toda la Física que conocemos: la Relatividad General porque en muy poco espacio está concentrada mucha materia y el espacio tiempo se deforma de manera apreciable, la interacción electromagnética porque hay interacción de partículas cargadas que compensan la carga de la estrella resultando una estrella neutra, la interacción electrodébil porque hay constante decaimiento de neutrinos y la fuerte porque o hay quarks deconfinados o hay hadrones¹ conformados por quarks.

Muchas interrogantes surgen cuando estudiamos este tipo de objetos. En particular para las ENs los grandes campos gravitacionales hacen que las densidades en ellas sean del orden de la densidad del núcleo atómico y hasta varias veces mayor (la masa del Sol está concentrada en un radio de ~ 10 km) [4]. En la medida que nos acercamos a su centro, pudieran ocurrir procesos aun más exóticos que puedan producir que los quarks “salgan” de sus neutrones, y se forme entonces una Estrella de Quarks (EQs). En realidad sería una Estrella Extraña porque aparece además de los quarks *up*(u) y *down*(d) otro más masivo: el quark *strange* o extraño (s), debido a procesos de desintegración β donde se transforman quarks u y d en s [5].

Estos objetos serían muy diferentes a las ENs, podrían ser más pequeños y compactos, tener

¹Se dividen en bariones(formados por 3 quarks) y mesones (pares quark–antiquark).

unos 6km de radio y rotar más rápido. La materia estaría cohesionada debido a la interacción fuerte y no a la gravitatoria como ocurre en las ENs [6].

Por tanto, conocer qué compone el interior de una ENs o afirmar que la existencia de una EQs es una realidad, está condicionado a responder cuál es el estado fundamental de la materia a muy altas densidades y con ello responder a la pregunta, desde la física de partículas elementales: ¿qué le ocurre a la materia cuando es “comprimida” hasta alcanzar densidades por encima de la densidad nuclear ($n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$) ²?

Hoy en día, la teoría aceptada para describir el comportamiento de las partículas subatómicas y sus interacciones es el Modelo Estándar. En este modelo se utiliza el aparato matemático de la Teoría Cuántica de Campos para unificar el Modelo Electrodébil (interacción electromagnética y débil unificada) y la Cromodinámica Cuántica (CDC) en una teoría que describe las interacciones de todas las partículas observadas experimentalmente.

Según el Modelo Estándar, la materia está compuesta por doce fermiones: seis quarks y seis leptones³ (y sus antipartículas), además están los bosones mediadores de las interacciones. En la Tabla 1 se muestran algunas de las propiedades de los quarks [7].

Quarks	Masa (MeV)	Carga($e^- = -1$)
u (up)	1,5 – 4,0	+2/3
d (down)	4 – 8	-1/3
s (strange)	80 – 130	-1/3
c (charm)	1150 – 1350	+2/3
t (bottom)	4100 – 4400	-1/3
b (top)	170900 ± 1800	+2/3

Tabla 1: Masas y cargas de los quarks [8].

Los quarks son los “ladrillos” que junto con los electrones forma la materia tal y como la conocemos: los nucleones (neutrones y protones), que están formados por quarks u y d y junto a los electrones forman átomos y estos las moléculas. El hecho de que ellos estén unidos dentro de los nucleones se debe a la interacción fuerte o de color (CDC) que opera a cortas distancia $\sim 10^{-13} \text{ cm}$.

La CDC describe las interacciones entre los quarks y los gluones, partículas mediadoras de la interacción fuerte, análogas a los fotones (mediadores de la interacción electromagnética). Entre las principales características que se derivan de la CDC están el confinamiento y la libertad asintótica que dan cuenta de que no hayan quarks libres en la Naturaleza, estén confinados a los hadrones y se comporten como libres dentro de ellos.

Sin embargo la CDC concibe que en condiciones extremas: alta temperatura o alta densidad, pueden existir quarks libres [9, 10]. Por tanto, pensar que el interior de una ENs pudiera ser el escenario real de la existencia de este tipo de materia es totalmente plausible. En el diagrama

²1 fm = 10^{-13} cm

³neutrinos y electrones

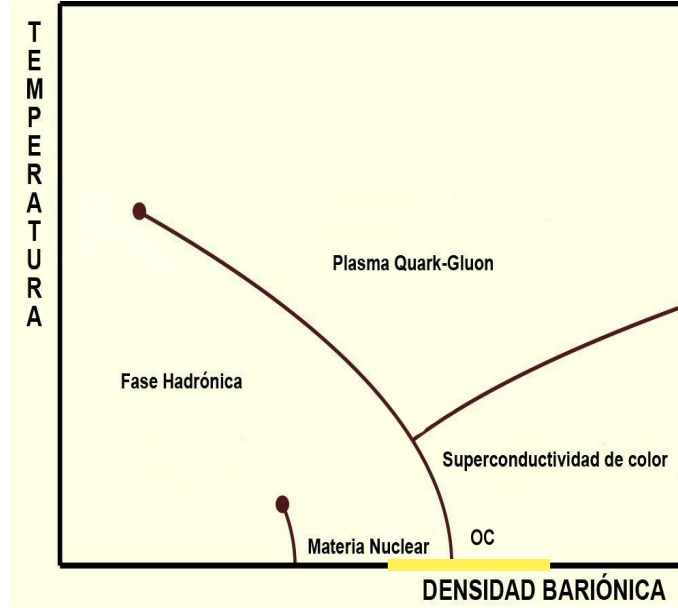


Figura 1: Esquema del diagrama de fase de la CDC

de fase de la CDC Fig (1) se representa la zona en que “habitan” los OC, es decir, bajas temperaturas ($T \sim 30$ MeV) y altos potenciales químicos ($\mu > 300$ MeV).

Los radios y masas de las EQs o las ENs se pueden medir indirectamente. Ellas emiten radiación Gamma y rayos X que se detectan por instrumentos colocados en satélites [11]. A estas estrellas se les asocian además campos magnéticos muy intensos que se explican por la amplificación del campo de las estrellas progenitoras después de la explosión de la Supernova. Estos campos son extraordinariamente grandes: de 10^{15} Gauss (el campo terrestre es de 0.5 Gauss) en la superficie, y 10^{18} Gauss (G) en el interior [3]. La NASA en el 2002 reportó 3 fuentes candidatas a Estrellas Extrañas [12].

En esta tesis nos proponemos estudiar la Materia de Quarks (MQ) en presencia de campos magnéticos intensos en equilibrio estelar y los observables astrofísicos que se obtienen para EQs formadas por MQ magnetizada.

Este trabajo le da entonces continuidad a [13, 14, 15] donde fueron estudiadas las propiedades termodinámicas del gas de quarks magnetizado porque, no solo se estudia la estabilidad de la materia de quarks y las EdE en condiciones realistas, sino también se investigan las implicaciones macroscópicas que tendría la existencia de EQs formadas por este tipo de materia magnetizada. Esto último se hace tomando en cuenta los efectos de la Relatividad General en el equilibrio hidrodinámico de la estrella a través de las ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [16].

Para ello usaremos el Modelo Fenomenológico MIT ⁴ Bag Model que permite describir el confinamiento de los quarks sin necesidad de usar la Cromodinámica Cuántica *CDC* que introduce grandes complicaciones matemáticas. En dicho modelo los quarks son considerados

⁴Massachusetts Institute of Technology.

libres dentro de un volumen (Bag) y es precisamente este quien reproduce el confinamiento. El equilibrio estelar significa que consideraremos que transcurre suficiente tiempo como para que ocurran procesos de desintegración β dentro de la estrella, mientras que la misma se mantiene eléctricamente neutra y conserva el número de bariones en su interior.

Un estudio así tiene importancia no solo para la Astrofísica sino también para la Física de Partículas. Buscando concordancia con las observaciones podríamos restringir parámetros de los modelos teóricos que influirían en las propiedades de la física del micromundo, hasta que lleguen experimentos terrestres que serían los más conclusivos.

En la tesis nos proponemos concretamente los siguientes objetivos:

1. Obtener la EdE, relación entre la presión y la densidad de energía de la MEQ y la materia normal de quarks (materia eléctricamente neutra formada por quarks u y d en equilibrio β con electrones), en presencia de campos magnéticos intensos en equilibrio estelar.
2. Estudiar la estabilidad de la MEQM en equilibrio estelar. Probar que la energía por barión para la MEQM es menor que para la MEQ y para la materia normal de quarks magnetizada.
3. Resolver las ecuaciones de TOV usando las EdE previamente obtenidas y así determinar las configuraciones estables de masa-radio para las estrellas de quark extrañas magnetizadas. Obtener además la masa bariónica y el corrimiento al rojo gravitacional para EQs.

La tesis está organizada de la siguiente forma: Los **Capítulos 1 y 2** están dedicados a introducir los aspectos fundamentales referente a los objetos compactos y a las propiedades de la materia de quarks respectivamente. En ellos sólo pretendemos dar a conocer los principales avances en estas áreas, por lo cual profundizaremos solo en los aspectos que nos sean necesarios en los demás capítulos. En el **Capítulo 3** exponemos las principales características de la materia de quarks magnetizada, obtenemos las EdE y estudiamos la estabilidad de la materia de quarks magnetizada en equilibrio estelar. En el **Capítulo 4** obtenemos las configuraciones estables de masa y radio para EQs, así como la masa bariónica y el corrimiento al rojo gravitacional. Posteriormente se exponen las conclusiones y recomendaciones de la tesis.

Capítulo 1

Objetos Compactos: Estrellas de Neutrones, Estrellas Extrañas.

1.1. Características generales.

En el Universo existe una gran variedad de fenómenos que despiertan el interés y el asombro de los seres humanos, sin dudas las estrellas constituyen uno de los escenarios más atractivos para la investigación.

La vida de una estrella pasa por diferentes etapas. Todo comienza cuando las nubes de gas estelar comienzan a agruparse gravitacionalmente, la temperatura aumenta y comienzan a fusionarse los elementos ligeros como el hidrógeno. En estas reacciones de fusión se van formando elementos más pesados. Cuando el combustible nuclear se agota, la estrella se transforma en una Supernova, su destino final depende en gran medida de la masa inicial de la estrella [17]. En la Fig (1.1) se resumen los posibles destinos de una estrella en dependencia de su masa, y sus principales características se resumen en la Tabla 1.1.

Entre los posibles destinos finales de las estrellas, nos centraremos en las ENs, debido a que como ya mencionamos con anterioridad ellas podrían tener en su interior una fase formada por MEQ formando o una Estrella Extraña o una híbrida.

Objeto Compacto	Masa ^a (M)	Radio ^b (R)	Densidad Media (g cm^{-3})
Enana Blanca	$\lesssim 1,4M_{\odot}$	$\sim 10^{-2}R_{\odot}$	$\lesssim 10^7$
Estrella de Neutrones	$\sim 1 - 3M_{\odot}$	$\sim 10^{-5}R_{\odot}$	$\lesssim 10^{15}$
Hueco Negro	Arbitraria	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$

^aMasa del Sol $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{33} \text{ g}$

^bRadio del Sol $R_{\odot} = 6,9599 \times 10^{10} \text{ cm}$

Tabla 1.1: Características de los Objetos Compactos [3].

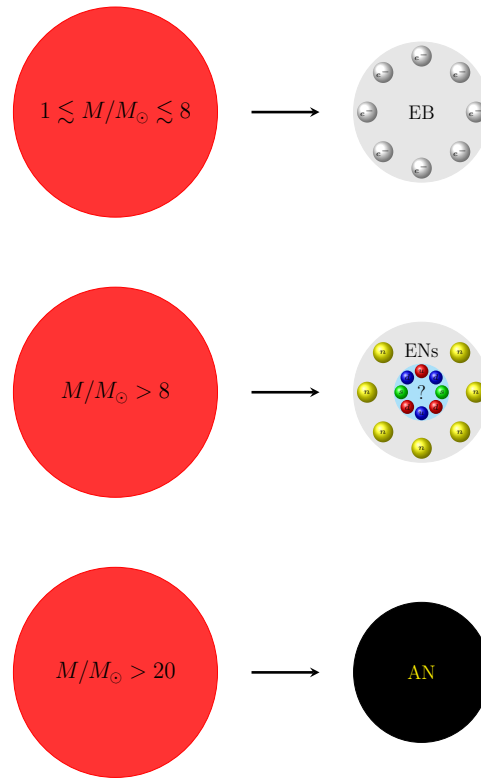


Figura 1.1: Diagrama que muestra el destino final de las estrellas en dependencia de su masa [17].

1.2. Estrellas de Neutrones.

Las ENs fueron predichas por Landau poco tiempo después de haberse descubierto el neutrón en el año 1932, desde entonces mucho se ha avanzado en el estudio de sus propiedades. Una ENs es el remanente de una estrella supergigante roja que al agotarse los elementos necesarios para los procesos de fusión comienza a colapsar, eyectando las capas externas en una explosión conocida como una Supernova tipo II. La materia que queda en el centro de la estrella se encuentra sometida a campos gravitacionales muy elevados. Debido a las altas densidades, los electrones son capturados por los protones formándose neutrones en una reacción β inversa ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$). La presión del gas degenerado de neutrones es la que frena el colapso de la estrella equilibrando de esta manera la fuerza gravitacional [4].

Las ENs están formadas por capas en las cuales podemos encontrar distintas familias de partículas. Se pueden identificar cinco capas fundamentales [4]: el núcleo interior y exterior, la corteza, la envoltura y la atmósfera. En la atmósfera y la envoltura se encuentra una cantidad despreciable de masa de la estrella, estas capas están formadas principalmente por electrones, núcleos y átomos. La corteza se extiende por unos 2 km, está compuesta por núcleos que varían de acuerdo a la densidad, van desde el núcleo de ^{56}Fe para densidades de 10^6 g cm^{-3} hasta núcleos con número bariónico $A \sim 200$ para densidades $n \approx n_0/3$. A medida que la densidad

continúa aumentando en la corteza hay toda una serie de cambios de fase hasta llegar al núcleo donde se concentra el 99 % de la masa. El núcleo exterior es una mezcla de nucleones, electrones y muones. En el núcleo interior se espera que exista una transición de fase a materia deconfinada de quarks.

Una característica importante de las ENs son sus elevados campos magnéticos ($B \sim 10^{12} - 10^{14}$ G), el mecanismo mediante el cual surgen estos campos no se comprende del todo. El modo más simple de explicar su surgimiento es producto de la compresión del flujo magnético durante el colapso del núcleo de la estrella progenitora, con esto se logra explicar la formación de campos entre $10^{11} - 10^{13}$ G.

Hay otro efecto que ocurre dentro de algunas ENs que pudiera explicar campos magnéticos mil veces mayores. Dentro de ellas el “gas de partículas” circula por convección, es decir, la temperatura no es uniforme luego hay partes del gas que están más calientes que otras. Como el gas es un buen conductor eléctrico cualquier línea de campo magnético lo arrastra moviéndolo con él. De esta manera el campo puede amplificarse. Este efecto se conoce como el Efecto Dinamo [18, 19] y se piensa que es el que origina el campo magnético en todas las estrellas e incluso en planetas; está presente durante toda la vida de las estrellas de una manera “sedada” pero para las EN cuyo núcleo rota rápidamente la convección llega a ser muy violenta. La primera simulación numérica hecha para ENs a partir de un modelo con convección puede verse en [20] y los resultados muestran que si una Estrella Neutrónica naciente tiene una temperatura de 3×10^9 K el fluido caliente circula en diez milisegundos y luego cesa. Esta furiosa convección explica el magnetismo de este tipo de estrella de neutrones [18]. En otras palabras, este modelo nos explicaría que si una estrella naciente de neutrones entrega el 10 % de su energía cinética al campo magnético este puede llegar a 10^{15} Gauss que es 10^3 veces superior a los campos que se deducen que tengan los radio pulsares. Entonces, si el efecto dinamo opera globalmente dependerá de la relación rotación-convección. Así una ENs con períodos de rotación del orden o superiores al período de convección de 10 milisegundos logrará campos de 10^{15} Gauss. Ellas son las llamadas Magnetars (Magnetic Stars-Estrellas Magnéticas). Por otro lado el Efecto Dinamo no tendrá lugar en pulsares como el Pulsar del Cangrejo que rota una vez cada 20 milisegundos, mucho menor que el período de convección. En ese caso el campo magnético no se incrementaría más allá de 10^{12} Gauss.

Hemos visto dos mecanismos que de conjunto podrían explicar campos magnéticos intensos en las ENs llamadas Magnetars. No obstante a pesar de que estas teorías son reconocidas por la comunidad científica no se descartan otras ideas para explicar los colosales campos magnéticos que en ENs aparecen [21].

1.3. Estrellas de Quarks.

El primer modelo de EQs fue propuesto por Itoh en el año 1970 [22], con este modelo simple se investigó el equilibrio hidrostático de las EQs siguiendo el método de Oppenheimer y Volkoff. La MEQ puede encontrarse como una fase en el núcleo de las ENs en cuyo caso tendremos una estrella híbrida, o puede formar una EQs, es decir, una estrella formada en su totalidad por quarks con una pequeña capa exterior de electrones.

Debido a la presencia de la fuerza nuclear fuerte las EQs son sistemas autoligados, a diferencia de la materia nuclear, que está ligada mediante la gravedad. Esto hace que las EQs puedan presentar configuraciones más compactas, es decir, menores radios con igual masa.

Las EQs al ser autoligadas no presentan una masa mínima como las ENs ($M_{min} = 0,1 M_{\odot}$) [3], y su masa máxima tiene una dependencia con el radio máximo (para masas pequeñas en comparación con la masa máxima) del tipo $M \sim R^3$, en contraste con las ENs, cuyo radio decrece con el aumento de la masa ($M \sim R^{-3}$).

Otra característica que distingue a las EQs es que violarían el límite de Eddington [11]. El límite de Eddington implica la existencia de una luminosidad máxima para una estrella con una masa dada, tal que la configuración se encuentre en equilibrio hidrostático. Para una estrella normal, el límite de Eddington está dado por

$$L_{\text{Edd}} \simeq 8,1 \times 10^{43} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ MeV s}^{-1}.$$

Para cualquier valor de radiación que supere este límite, no habrá equilibrio hidrostático, causando la pérdida de masa de la estrella. El mecanismo de emisión en una EQs produciría luminosidades por encima de dicho límite. Al ser autoligada la EQs, el límite de Eddington no le es aplicable. Así, su superficie puede alcanzar temperaturas mucho mayores que las que se observan en una ENs, y por lo tanto, la emisión de energía térmica [23] también debe ser mayor.

A pesar de estas diferencias experimentalmente es difícil diferenciar a una ENs de una EQs.

1.4. Evidencias observacionales.

La primera ENs fue descubierta en 1967 por Jocelyn Bell al estudiar las señales de radio provenientes de un objeto en el cielo. Jocelyn descubrió el pulsar CP 1919 (Cambridge Pulsar $19^h 19^m$) observando que la señal de radio que recibía tenía un período exacto de 1.3373 segundos y un ancho de pulso de 0.04 segundos [24]. Al inicio se pensó incluso que esta señal provenía de alguna civilización extraterrestre, hasta que Thomas Gold y Fred Hoyle identificaron que la señal se generaba a partir de una ENs en rotación con un elevado campo magnético [25].

En la actualidad han sido identificados más de 2000 objetos como ENs. La determinación de parámetros como la masa, el radio y las características de enfriamiento pueden imponer restricciones a las EdE para la materia a altas densidades. Los astrónomos buscan fundamentalmente estrellas aisladas para determinar sus propiedades, a partir de los espectros de emisión, sin que interfieran complicados mecanismos de transmisión de materia de un objeto a otro [26].

La mejor forma de determinar la masa de una ENs es a través de la tercera ley de Kepler [3]. Uno de los mejores resultados en la determinación de masas se obtuvo para el pulsar binario PSR 1913+16 cuyas masas son $1,3867 \pm 0,0002$ y $1,4414 \pm 0,0002 M_{\odot}$ [27] respectivamente.

La determinación de los radios se hace de forma indirecta, se combinan los datos observacionales con la teoría para obtener algunos estimados que arrojan valores entre 9 – 15 km [11].

El campo magnético se determina a partir de las observaciones del decrecimiento en el período de rotación de los pulsares. Aunque estas mediciones no son muy precisas, se estiman

valores de entre 10^{12} y 10^{15} G [28].

El corrimiento al rojo z_s se determina a partir del análisis del espectro de emisión de la estrella.

Existe toda una serie de observaciones que hacen pensar que algunos de los objetos que se comportan como ENs, son en realidad EQs o estrellas híbridas.

El observatorio Chandra de rayos X de la NASA encontró dos estrellas inusuales: la fuente RX J1856.5-3754 [29, 30] con una temperatura de 10^5 K y la fuente 3C58 con un período de 65 ms. RX J1856.5-3754 es demasiado pequeña para ser una ENs convencional y 3C58 parece haberse enfriado demasiado rápido en el tiempo de vida que se le estima.

Combinando los datos del Chandra y del telescopio espacial Hubble, los astrónomos determinaron que RX J1856.5-3754 radia como si fuera un cuerpo sólido con una temperatura de unos 7×10^5 °C y que tiene un diámetro de alrededor de 11 km, que es un tamaño demasiado pequeño como para conciliarlo con los modelos conocidos de las ENs.

La fuente de rayos X denominada EXO 0748-676 es otro de los objetos que atrae la atención pues posee una masa de $1,5 < M/M_\odot < 2,3$ y un radio de $9,5 \text{ km} < R < 15 \text{ km}$ con un corrimiento al rojo de $z_s = 0,35$ [31].

En febrero de 1987 en el observatorio de Las Campanas, en Chile, fue observada la Supernova 1987A en la Gran Nube de Magallanes. El remanente estelar que ha quedado como consecuencia de la explosión de esta Supernova, podría ser una EQs, ya que el período de emisión de este pulsar es de $P_{em} = 0,5 \text{ ms}$. Una ENs canónica no podría tener una frecuencia de rotación tan alta [12, 32].

Capítulo 2

Materia de quarks.

2.1. Modelo para describir la materia de quarks.

2.1.1. CDC y materia de quarks.

El Lagrangiano de la CDC es [33]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) q - \frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.1)$$

donde q es el campo de los quarks con seis sabores (u, d, s, c, b, t) y tres colores, y $\hat{m} = \text{diag}_f(m_u, m_d, \dots)$ es la matriz de masa. La derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \quad (2.2)$$

está relacionada con el campo de los gluones A_μ^a y

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.3)$$

es el tensor de fuerzas de los gluones. λ^a y f^{abc} son los generadores del grupo $SU(3)$ (matrices de Gell-Mann) y las correspondientes constantes antisimétricas de estructura respectivamente. g es la constante de acoplamiento de la CDC.

El Lagrangiano (2.1) es por construcción simétrico bajo las transformaciones del grupo $SU(3)$ en el espacio de color. Este grupo tiene un carácter no Abelianiano debido a la presencia de los términos f^{abc} en (2.3). Debido a esto, como ya se explicó en la introducción, la CDC presenta algunas características peculiares, que no están presentes en teorías de calibración Abelianas como la Electrodinámica Cuántica, ellas son:

- Los gluones presentan carga de color.

- La CDC es una teoría asintóticamente libre, es decir el acoplamiento disminuye para cortas distancias o de forma equivalente para grandes energías. En la aproximación de un lazo tenemos que:

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \approx \frac{4\pi}{(11 - \frac{4}{3}N_f)\ln(\mu^2/\Lambda_{CDC}^2)}, \quad (2.4)$$

donde N_f es el número de sabores y $\Lambda_{CDC} = (200 \sim 300) MeV$ es un parámetro de renormalización.

- Para bajas energías la interacción es fuerte, es decir, la fuerza entre las partículas aumenta con la distancia (confinamiento).
- El Lagrangiano presenta (aproximadamente) simetría quiral, es decir, es simétrico ante las transformaciones globales $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$. Esta simetría sería exacta en el límite en que el número de sabores de quarks N_f , tenga masa nula.

Veamos con más detenimiento las implicaciones de la ecuación (2.4) [34]. En el caso de la Electrodinámica la constante de acoplamiento (constante de estructura fina) tiene un valor $\alpha_{EM} \simeq 1/137 < 0,01$, este hecho hace que podamos dar un tratamiento perturbativo a esta teoría.

Para la CDC se podrían utilizar métodos perturbativos en el límite $\mu \rightarrow \infty$, esto equivale, para la MEQ a la condición de que la densidad bariónica tienda a infinito ($n_B \rightarrow \infty$) ya que el potencial químico bariónico sería $\mu \simeq (3\pi^2)^{1/3} \hbar c n_B^{1/3}$.

Estimemos el valor de α_s para las densidades que se encuentran en el interior de las EQs. Para densidades $n_B = 10n_0$, obtenemos que $\alpha_s \simeq 0,8$. Incluso si $n_B = 10^6 n_0$ obtenemos que $\alpha_s \simeq 0,15$. Para que $\alpha_s \sim \alpha_{EM}$ se necesitaría que $n_B > 10^{123} n_0$.

Estas estimaciones nos aseguran la imposibilidad de utilizar Teoría de Perturbaciones a partir de la CDC si intentamos describir un sistema real, como es el interior de los OC. Por ello para estudiar estos sistemas se han propuesto varios modelos fenomenológicos, uno de los más exitosos es el Modelo de Bag del MIT, que describiremos seguidamente y que será el que usaremos en esta tesis.

2.1.2. Modelo de Bag del MIT.

El modelo de Bag (bolsa) del MIT fue propuesto en los años 70 [35] para describir desde el punto de vista microscópico a los hadrones. En este modelo se logra reproducir la libertad asintótica y el confinamiento de los quarks, dos de las propiedades más importantes de la CDC, a través de un parámetro libre del modelo B_{bag} .

En este modelo se describe a los quarks como partículas libres (o casi libres) confinados dentro de un Bag. La estabilidad del Bag se garantiza introduciendo el parámetro B_{bag} que se interpreta como una contribución positiva a la densidad de energía, y negativa a la presión dentro del volumen. De forma equivalente podemos atribuir el término $-B_{bag}$ a la región fuera del Bag, lo que conduce a un vacío con una densidad de energía negativa $\epsilon_{vac} = -B_{bag}$ y una

presión positiva $p_{vac} = +B_{bag}$. El tensor energía impulso dentro del Bag para un fluido perfecto viene dado por:

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = diag(\epsilon, P, P, P), \quad (2.5)$$

donde ϵ es la densidad de energía y P es la presión del fluido.

El término $B_{bag} g^\mu_\nu$ (siendo g^μ_ν el tensor métrico) se añade al tensor energía impulso dentro del Bag quedando entonces las siguientes expresiones para la presión y para la densidad de energía:

$$P = \sum_f P_f - B_{bag} \quad (2.6)$$

$$\epsilon = \sum_f \epsilon_f + B_{bag}, \quad (2.7)$$

donde la suma es sobre los sabores de los quarks.

El modelo fenomenológico de Bag del MIT es ampliamente usado para describir la materia en el interior de los OC. Es el que utilizaremos en el Capítulo 3 para encontrar las EdE de la MEQM y estudiar la estabilidad de la misma.

2.2. Hipótesis de la materia extraña de Quarks.

La hipótesis sobre la existencia de la MEQ o conjetura de Bodmer–Witten establece que la materia formada por quarks u , d y s en estado libre, puede ser el estado básico de la materia. Este hecho se cumple si se satisface la desigualdad:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{MEQ} < \left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}}, \quad (2.8)$$

es decir, la energía por barión para la MEQ es menor que la energía por barión para el ^{56}Fe (núcleo más estable de la naturaleza).

El hecho empírico de que en la Naturaleza la materia que se observa está formada por núcleos compuestos por neutrones y protones, y que no hallemos la MEQ, no entra en contradicción con la hipótesis de su existencia. Para que ésta se forme a partir de núcleos normales es necesario que los quarks u y d , que forman los neutrones y protones, se transformen en quarks s . Pero no solo con eso basta, se necesita para lograr la estabilidad que la fracción de quarks s sea grande ($n_s \approx n_u \approx n_d$). La probabilidad de que ocurra la reacción débil que garantiza que se formen los quarks s es casi nula, lo que hace que solo para grandes densidades, en el interior de las ENs y durante millones de años, se forme la cantidad necesaria de quarks s para que la MEQ sea más estable que la materia nuclear [36].

Sin embargo, la estabilidad de los núcleos sí excluye la estabilidad de la materia compuesta solamente por quarks u y d , como se demuestra a continuación.

2.2.1. Estabilidad de la materia de quarks normal en equilibrio estelar.

Analicemos la estabilidad para el caso de la materia de quarks formada por quarks u y d en equilibrio β con electrones. Este tipo de materia pudiera formarse en el interior de los OC al formarse el plasma quark–gluón. Como veremos, la misma constituiría un estado metaestable, pues tiene mayor energía por barión que la materia nuclear.

El equilibrio químico dentro de la estrella se garantiza a través de la reacción de desintegración β :

$$d \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.9)$$

Como las estrellas son neutras se impone la condición de neutralidad de carga que en el caso general se expresa mediante:

$$\sum_f n_f q_f - n_e = 0, \quad (2.10)$$

donde q_f ($f = u, d, s$) son las cargas de los quarks que vienen dadas en la Tabla 1 y n_i ($i = u, d, s, e$) (emplearemos el subíndice f cuando tengamos en cuenta solamente los quarks y el subíndice i cuando incluyamos a los electrones) son las densidades de las partículas involucradas. Se impone también la conservación del número bariónico:

$$n_B = \frac{\sum_f n_f}{3} \quad (2.11)$$

De las condiciones anteriores podemos escribir el siguiente sistema ecuaciones:

$$\mu_u + \mu_e - \mu_d = 0 \quad \text{equilibrio } \beta \quad (2.12a)$$

$$2n_u - n_d - 3n_e = 0 \quad \text{neutralidad de carga} \quad (2.12b)$$

$$n_u + n_d - 3n_B = 0 \quad \text{conservación del número bariónico}, \quad (2.12c)$$

donde μ_i y n_i son los potenciales químicos de las partículas.

Hemos supuesto que ha pasado el tiempo suficiente para que los neutrinos hayan escapado del sistema por lo que tomaremos $\mu_{\bar{\nu}_e} = 0$. El sistema (2.12) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas μ_i ($i = u, d, e$). Los resultados obtenidos a partir de este sistema serán utilizados para comparar con los de la MEQ.

Podemos realizar un análisis de la estabilidad de este tipo de materia. Para esto tendremos en cuenta que en equilibrio β la fracción de electrones es despreciable, también consideraremos que las masas de los quarks u, d son nulas. En este caso tenemos:

$$n_f = \frac{\mu_f^3}{\pi^2} \quad \epsilon_f = \frac{3\mu_f^4}{4\pi^2} \quad P_f = \frac{\mu_f^4}{4\pi^2}, \quad (2.13)$$

Utilizando el modelo de Bag del MIT e imponiendo la condición de equilibrio ($P = 0$) obtenemos para la energía y la presión total dentro del bag (2.6) y (2.7):

$$B_{bag} = \sum_f P_f \quad (2.14)$$

$$\epsilon = 4B_{bag}, \quad (2.15)$$

La neutralidad de carga en este caso toma la forma: $n_d = 2n_u \Rightarrow \mu_u = 2^{-1/3}\mu_d \equiv \mu_{ud}$, para la presión tenemos: $P_{ud} = P_u + P_d = (\frac{1+2^{4/3}}{4\pi^2})\mu_{ud}^4 = B_{bag}$ y la conservación del número bariónico nos da: $n_{Bud} = \frac{n_u+n_d}{3} = \mu_{ud}/\pi^2$, con estas ecuaciones podemos calcular la energía por barión para el gas formado por quarks u y d :

$$\frac{\epsilon_{ud}}{n_{Bud}} = (1 + 2^{4/3})^{1/4} (4\pi^2)^{1/4} B_{bag}^{1/4} = 6,411 B_{bag}^{1/4} \simeq 943 \text{ MeV} \quad (2.16)$$

donde hemos tomado $B_{bag}^{1/4} = 145 \text{ MeV} \Rightarrow B_{bag} \simeq 57 \text{ MeV fm}^{-3}$. La energía por barión para un gas de neutrones es la masa del neutrón ($m_n = 939,6 \text{ MeV}$), para un gas de ^{56}Fe la energía por barión se puede calcular como: $E/A|_{^{56}\text{Fe}} = (56m_N - 56 \cdot 8,8)/56 = 930 \text{ MeV}$. Por tanto la estabilidad del gas formado por quarks u y d con respecto al gas de neutrones requiere que $\epsilon_{ud}/n_{Bud} < m_n \Rightarrow B_{bag} < 60 \text{ MeV fm}^{-3}$ y con respecto al gas de ^{56}Fe que $\epsilon_{ud}/n_{Bud} < E/A|_{^{56}\text{Fe}} \Rightarrow B_{bag} < 57 \text{ MeV fm}^{-3}$.

En la naturaleza se observan los neutrones y el ^{56}Fe pero no el gas de quarks u y d , por lo que se concluye que el B_{bag} debe ser mayor que los valores antes mencionados. Este hecho hace que se tome el valor $B_{bag} = 57 \text{ MeV fm}^{-3}$ como un límite inferior para este parámetro.

2.2.2. Estabilidad de la Materia Extraña de Quarks en equilibrio estelar.

Analicemos ahora la estabilidad de la MEQ, es decir, materia formada por quarks u , d y s libres. El equilibrio químico de este sistema está garantizado por las interacciones débiles:

$$\begin{aligned} d &\leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \\ s &\leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \\ u + s &\leftrightarrow d + u \end{aligned}$$

estas reacciones conducen a relaciones entre los potenciales químicos. Tomaremos igualmente que $\mu_{\bar{\nu}_e} = 0$ pues los neutrinos escapan de la estrella. El equilibrio β , la neutralidad de carga y la conservación del número bariónico quedan expresados mediante:

$$\mu_u + \mu_e - \mu_d = 0, \quad \mu_d - \mu_s = 0, \quad (2.17a)$$

$$2n_u - n_d - n_s - 3n_e = 0, \quad (2.17b)$$

$$n_u + n_d + n_s - 3n_B = 0. \quad (2.17c)$$

Al igual que en el caso de la materia de quarks normal supondremos que la fracción de electrones es muy pequeña, por tanto la neutralidad de carga queda como: $n_u = n_d = n_s \Rightarrow$

$\mu_{uds} = \mu_u = \mu_d = \mu_s$. Para un B_{bag} fijo el gas de u, d, s ejerce la misma presión que el gas de u y d , también la energía es la misma ($\epsilon_{uds} = 4B_{bag}$). Esto ocurre cuando $\mu_{uds} = 3^{-1/4}(1+2^{4/3})^{1/4}\mu_{ud}$ con lo que se obtiene el número bariónico: $n_{Buds} = \mu_{uds}/\pi^2 = [(1+2^{4/3})/3]^{3/4}n_{Bud}$, esto nos da una energía por barión:

$$\frac{\epsilon_{uds}}{n_{Buds}} = 3^{3/4}(4\pi^2)^{1/4}B_{bag}^{1/4} = 5,71B_{bag}^{1/4} \simeq 829 \text{ MeV}, \quad (2.18)$$

este valor es 100 veces menor que para la materia normal de quarks (para un mismo valor de B_{bag}), por lo que podemos decir que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{MEQ} < \left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{u,d}, \quad (2.19)$$

donde el parámetro B_{bag} se encuentra entre $57 - 90 \text{ MeV fm}^{-3}$. Este resultado conduce directamente a la hipótesis de Bodmer–Witten para el caso de ambientes ricos en quarks s como puede ser el interior de las ENs [37].

En el capítulo siguiente estudiaremos los efectos del campo magnético en la estabilidad de la MEQ y de la materia normal de quarks.

Capítulo 3

Propiedades termodinámicas de la Materia Extraña de Quarks.

3.1. Materia extraña de quarks a $B = 0$ y $T = 0$.

De forma general el gran potencial termodinámico para el gas de quarks relativistas y libres, en el marco del modelo de Bag, viene dado por cuatro términos [38]:

$$\Omega = B_{bag}V + \sum_i [\Omega_{i,v}(\mu_i, T)V + \Omega_{i,s}(\mu_i, T)S + \Omega_{i,c}(\mu_i, T)C], \quad (3.1)$$

donde la suma se extiende sobre $i = (u, d, s, e)$, y tiene en cuenta todas las especies de fermiones presentes: electrones, quarks u , d y s ; μ_i es el potencial químico de cada gas de partículas; T la temperatura; V , S y C son el volumen dentro del cual se encuentra el gas, el área y curvatura de la superficie del Bag respectivamente.

Consideraremos en nuestro estudio un volumen en el interior de la estrella por lo que no tendremos en cuenta los efectos superficiales ni de curvatura. Dentro de este volumen, los quarks u , d , s se comportan como partículas libres Fig (3.1). El término volumétrico del Gran Potencial Termodinámico para fermiones libres está dado por la expresión [39]:

$$\Omega_{i,v}(\mu_i, T) = -\frac{d_i T}{(2\pi)^3} \int_p [\ln[f^+(p, \mu_i, T)f^-(p, \mu_i, T)]d^3p], \quad (3.2)$$

$$f^\pm(p, \mu_i, T) = 1 + \exp\left\{-\frac{E_{p,i} \mp \mu_i}{T}\right\}, \quad (3.3)$$

aquí f^\pm representa las contribuciones de las partículas y antipartículas (f^+ para partículas y f^- para antipartículas), $E_{p,i}$ es la energía de las partículas dada por el espectro y d_i es el factor de degeneración: 1 para electrones y 3 para quarks¹. El Gran Potencial juega un papel importante

¹Se toma por convenio las unidades naturales $\hbar = c = k = 1$.

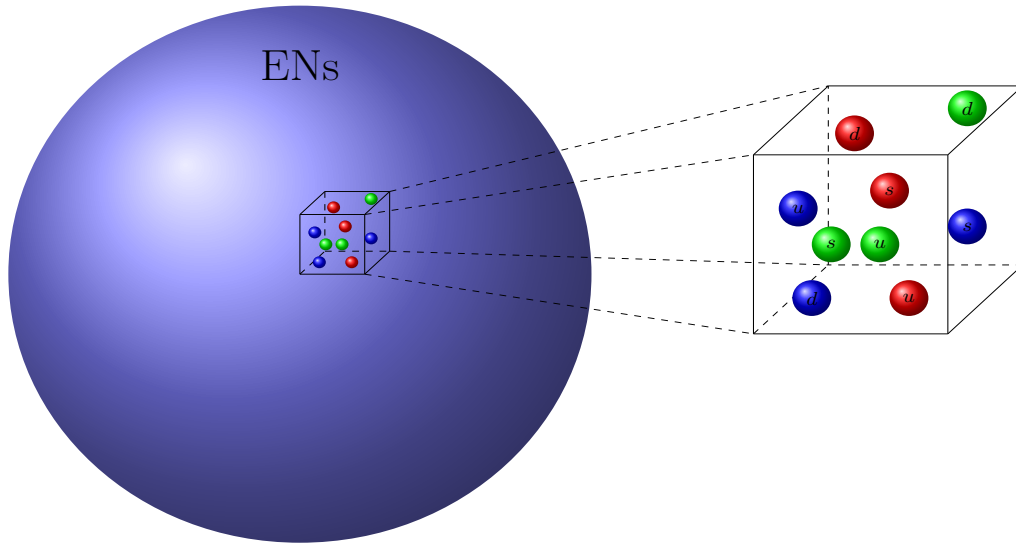


Figura 3.1: Volumen local en el cual los quarks se comportan como partículas libres.

ya que de él se derivan todas las propiedades termodinámicas del sistema [39, 40] y se pueden obtener las EdE del sistema.

En (3.2) y (3.3), $E_{p,i}$ se obtiene de la solución de la ecuación de Dirac para fermiones libres:

$$E_{p,i} = \sqrt{p^2 + m_i^2}, \quad (3.4)$$

donde \vec{p} y m_i representan el momentum lineal y la masa en reposo de cada partícula respectivamente.

En nuestro caso podemos hacer un cambio de variables a coordenadas esféricas e integrar por partes con lo que obtenemos:

$$\Omega_{i,v}(\mu_i, T) = -\frac{d_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \left(n_F\left(\frac{E_{p,i} - \mu_i}{T}\right) + n_F\left(\frac{E_{p,i} + \mu_i}{T}\right) \right), \quad (3.5)$$

donde $n_F(x) = 1/(e^x + 1)$ es la función de distribución de Fermi-Dirac.

En el caso de una ENs o una EQs la temperatura es mucho menor que la temperatura de Fermi ($T/T_F \sim 10^{-4}$), por lo que podemos considerar el límite degenerado ($T = 0$). Esto hace que $n_F = \theta(\mu_i - E_{p,i})$ donde $\theta(x)$ es la función paso unitario, además la contribución de las antipartículas es nula pues $n_F(\frac{E_{p,i} + \mu_i}{T}) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ con lo que obtenemos:

$$\Omega_{i,v}(\mu_i, 0) = -\frac{d_i}{6\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_i^2 - m^2}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (3.6)$$

La integral (3.6) da como resultado:

$$\Omega_{i,v}(\mu_i, 0) = -\Omega_0 \left\{ x_i \left(x_i^2 - \frac{5}{2} \right) p_{F,i} + \frac{3}{2} \cosh^{-1}[x_i] \right\}, \quad (3.7)$$

donde hemos definido la variable adimensional $x_i = \mu_i/m_i$, $\Omega_0 = \frac{d_i m_i^4}{24\pi^2}$ y $p_{F,i} = \sqrt{x_i^2 - 1}$ es el momentum de Fermi adimensional de cada especie.

A partir de (3.7) podemos obtener la presión, la densidad de partículas y la energía del sistema:

$$P = - \sum_i \Omega_{i,v} \quad (3.8)$$

$$N_i = - \frac{\partial \Omega_{i,v}}{\partial \mu_i} \quad (3.9)$$

$$\epsilon_i = \Omega_{i,v} + \mu_i N_i, \quad (3.10)$$

la energía total viene dada por la ecuación (2.7). Se recuperan las expresiones (2.13) cuando tomamos $m_i = 0$.

3.2. Materia Extraña de Quarks Magnetizada a $T = 0$.

En el caso de la MEQM, estudiaremos igualmente un volumen local con un campo magnético, que consideraremos constante, homogéneo y en la dirección del eje z Fig (3.2).

El espectro energético se obtiene al resolver la ecuación de Dirac para fermiones en presencia de un campo magnético y tiene la forma [41]:

$$E_{p,i}^{n,\eta} = \sqrt{p_z^2 + p_\perp^2 + m_i^2}, \quad p_\perp^2 = m_i^2 \left\{ \left(\sqrt{\frac{B}{B_i^c}} (2n + 1 - \eta) + 1 - \eta y_i B \right)^2 - 1 \right\}. \quad (3.11)$$

$$B_i^c = \frac{m_i^2}{q_i}, \quad y_i = \frac{Q_i}{m_i}, \quad \tau = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{2m_e}.$$

donde n son los niveles discretos de Landau, $\eta = \pm 1$ son los autovalores del operador de spin, B es el campo magnético, B_i^c es el valor del campo crítico (campo para el cual la energía ciclotrónica se iguala a la energía en reposo), q_i , Q_i y m_i representan la carga eléctrica, el momento magnético anómalo (MMA) y la masa de cada partícula respectivamente. La carga eléctrica de cada partícula está en la Tabla 1, los valores de MMA y la masa que utilizaremos se dan en la Tabla 3.2.

Análogamente al proceso que seguimos para calcular el potencial termodinámico para el gas de quarks sin campo magnético, en el caso de campo tenemos que calcular la integral (3.2).

En presencia del campo magnético la simetría deja de ser esférica, por lo que para integrar realizamos un cambio a coordenadas cilíndricas obteniendo:

$$\Omega_{i,v}(\mu_i, T) = - \frac{d_i T}{(2\pi)^3} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\ln[1 + \exp\{-\frac{E_{p,i}^{n,\eta} - \mu_i}{T}\}]] dp_z, \quad (3.12)$$

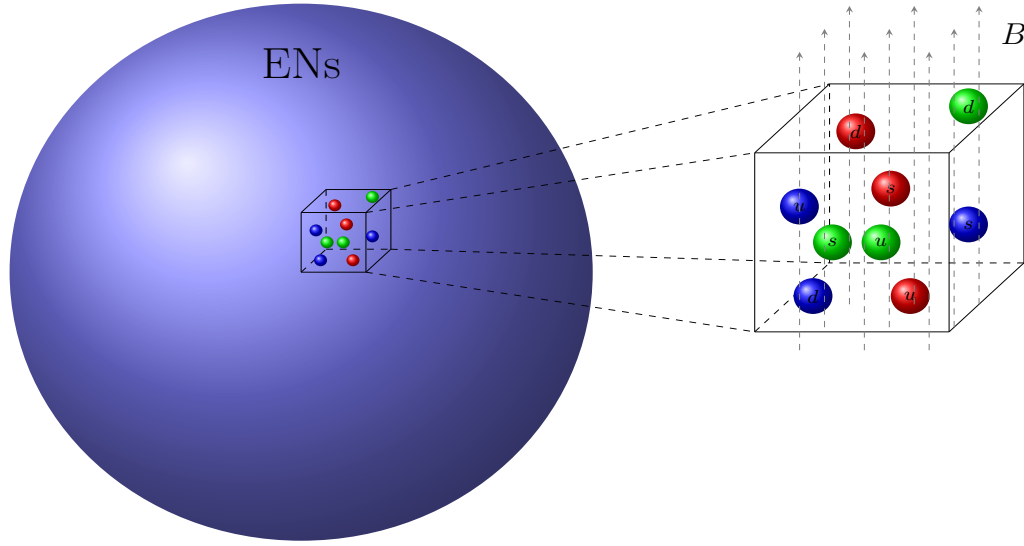


Figura 3.2: Igual que en la Fig (3.1), pero considerando un campo magnético constante y homogéneo.

Partículas	u	d	s	e
Q_i	$1,85\mu_N^\dagger$	$-0,97\mu_N$	$-0,58\mu_N$	$1,16 \times 10^{-3}\mu_B^\ddagger$
m_i (MeV)	5	5	150	0.5

† Magneton Nuclear $\mu_N = e/2m_p \simeq 3,15 \times 10^{-18} \text{MeV G}^{-1}$.

‡ Magneton de Bohr $\mu_B = e/2m_e \simeq 5,79 \times 10^{-15} \text{MeV G}^{-1}$.

Tabla 3.1: Valores del MMA y masa de las partículas consideradas en nuestro estudio.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [dp_x dp_y] = 2\pi q_i B. \quad (3.13)$$

El potencial termodinámico tiene la forma:

$$\Omega = -B \sum_i \mathcal{M}_i^0 \sum_n^{n_{i,max}} \sum_{\eta=\pm 1} \left(x_i p_{F,i}^\eta - h_i^{\eta 2} \ln \frac{x_i + p_{F,i}^\eta}{h_i^\eta} \right), \quad (3.14)$$

donde

$$\mathcal{M}_i^0 = \frac{e_i d_i m_i^2}{4\pi^2}, \quad p_{F,i}^\eta = \sqrt{x_i^2 - h_i^{\eta 2}}, \quad (3.15)$$

$$h_i^\eta = \sqrt{\frac{B}{B_i^c} (2n + 1 - \eta) + 1 - \eta y_i B}. \quad (3.16)$$

En la ecuación (3.14) la suma sobre los niveles de Landau n es hasta el valor entero $n_{max}^i = I[(x_i + \eta y_i B)^2 - 1] B_i^c / (2B)$, $p_{F,i}$ y h_i^η son el momento de Fermi y la masa magnética respectivamente.

La presencia del campo magnético hace que surja una anisotropía en la presión, de tal forma que la podamos dividir en paralela P_{\parallel} y perpendicular al campo P_{\perp} , por lo que el tensor energía impulso (2.5) queda:

$$\mathcal{T}_{\nu}^{\mu} = diag(\epsilon, P_{\perp}, P_{\perp}, P_{\parallel}), \quad (3.17)$$

donde $P_{\parallel} = -\Omega$ y $P_{\perp} = -\Omega - \mathcal{M}B$ siendo $\mathcal{M} = -\partial\Omega_{i,v}/\partial B$ la magnetización.

Los parámetros termodinámicos se expresan mediante las expresiones:

$$N = \sum_i N_i^0 \frac{B}{B_i^c} \sum_n^{n_{max}^i} \sum_{\eta=\pm 1} p_{F,i}^{\eta}, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon = \Omega + \mu N = B \sum_i \mathcal{M}_i^0 \sum_n^{n_{max}^i} \sum_{\eta=\pm 1} \left(x_i p_{F,i}^{\eta} + h_i^{\eta 2} \ln \frac{x_i + p_{F,i}^{\eta}}{h_i^{\eta}} \right), \quad (3.19)$$

$$P_{\parallel} = -\Omega = B \sum_i \mathcal{M}_i^0 \sum_n^{n_{max}^i} \sum_{\eta=\pm 1} \left(x_i p_{F,i}^{\eta} - h_i^{\eta 2} \ln \frac{x_i + p_{F,i}^{\eta}}{h_i^{\eta}} \right), \quad (3.20)$$

$$P_{\perp} = -\Omega - \mathcal{M}B = B \sum_i \mathcal{M}_i^0 \sum_n^{n_{max}^i} \sum_{\eta=\pm 1} \left(2h_i^{\eta} \gamma_i^{\eta} \ln \frac{x_i + p_{F,i}^{\eta}}{h_i^{\eta}} \right), \quad (3.21)$$

donde

$$N_i^0 = \frac{d_i m_i^3}{2\pi^2}, \quad (3.22)$$

$$\gamma_i^{\eta} = \frac{B(2n+1-\eta)}{2B_i^c \sqrt{(2n+1-\eta)B/B_i^c + 1}} - \eta y_i B, \quad (3.23)$$

son magnitudes adimensionales.

Las expresiones anteriores contienen las contribuciones del diamagnetismo de Landau (cuantización de los niveles de Landau), y el paramagnetismo de Pauli debido a la presencia del MMA. El paramagnetismo de Pauli no modifica las EdE ni la estabilidad de la MEQM, por lo que no tendremos en cuenta su efecto en lo que sigue.

3.2.1. Ecuaciones de estado para la MEQ.

Para determinar las EdE de la MEQM en equilibrio estelar, hay que resolver numéricamente las ecuaciones (2.17). En la Fig (3.3) mostramos las EdE para la MEQ ($B = 0$) y para la MEQM para $B = 5 \times 10^{18}$ G, en todos los casos hemos tomado el valor $B_{bag} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$. Para comparar hemos incluido las EdE de la materia normal (u, d en equilibrio con electrones).

El caso $B = 0$ no muestra diferencias con la ecuación de estado $P = (\epsilon - 4B_{\text{bag}})/3$ de la materia formada por quarks u y d sin masa, analizada en el epígrafe (2.2.1), lo que muestra que considerar las masas de los quark u y d diferentes de cero, siendo ellas tan pequeñas, no influye de manera significativa en los resultados.

Aunque las variaciones que el campo magnético produce en las EdE no son muy notables, ellas pueden alterar las propiedades macroscópicas como son la masa y el radio de la estrella como veremos en el siguiente capítulo.

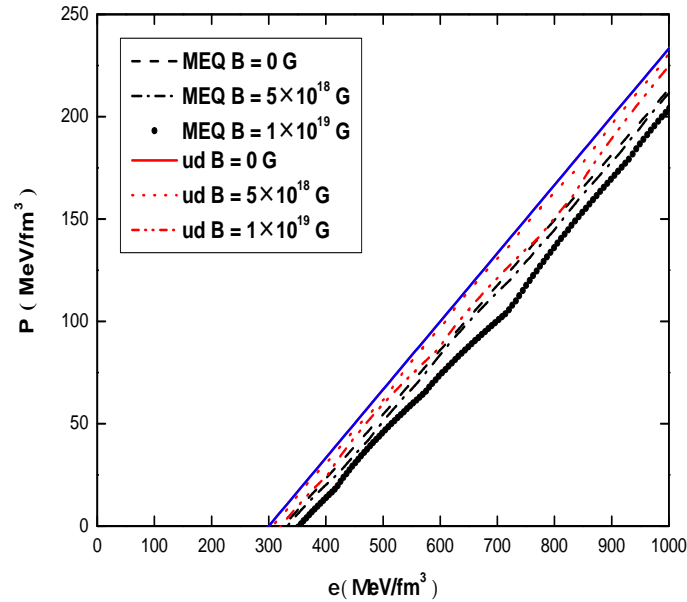


Figura 3.3: Ecuación de estado para la MEQ: presión contra energía para diferentes valores de campo. Para comparar se han añadido las gráficas para la materia normal en equilibrio con electrones.

3.3. Estabilidad de la materia de quarks magnetizada.

Estudiemos la estabilidad de la MEQM como función de los parámetros del modelo, es decir, la densidad bariónica (n_B), el campo magnético, el parámetro de Bag y la masa del quark s m_s . Debido a la presencia del campo magnético, la anisotropía de las presiones implica que $P_{\perp} < P_{\parallel}$ [13]. La condición de estabilidad se expresa mediante la relación:

$$P_{\perp} = \sum_i P_{\perp,i} - B_{\text{bag}} = 0. \quad (3.24)$$

Para investigar la estabilidad de la MEQM en equilibrio estelar resolveremos el sistema de ecuaciones (2.17) y (3.24), utilizando los resultados obtenidos en (3.21)– (3.18). Al resolver

este sistema de ecuaciones se obtiene la región en la cual los parámetros cumplen con las desigualdades de estabilidad:

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{MEQ}^B < \left. \frac{E}{A} \right|_{MEQ}^{B=0} < \left. \frac{E}{A} \right|_{^{56}\text{Fe}} < \left. \frac{E}{A} \right|_{u,d}^B < \left. \frac{E}{A} \right|_{u,d}^{B=0}. \quad (3.25)$$

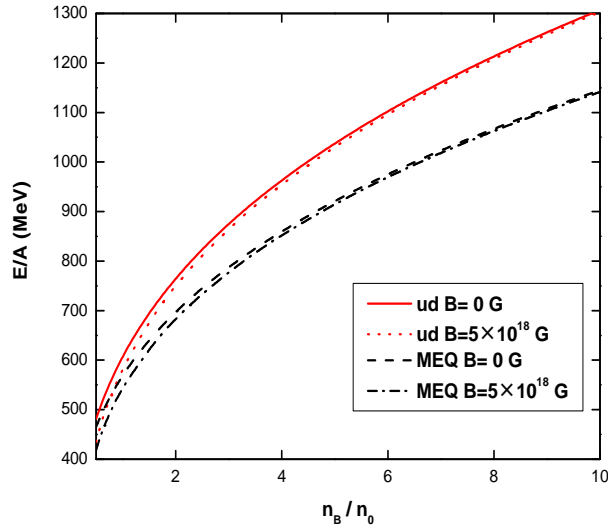


Figura 3.4: Energía por barión en función de la densidad bariónica para $B = 0$ y $B = 5 \times 10^{18}$ G, asumiendo la condición de estabilidad de presión cero.

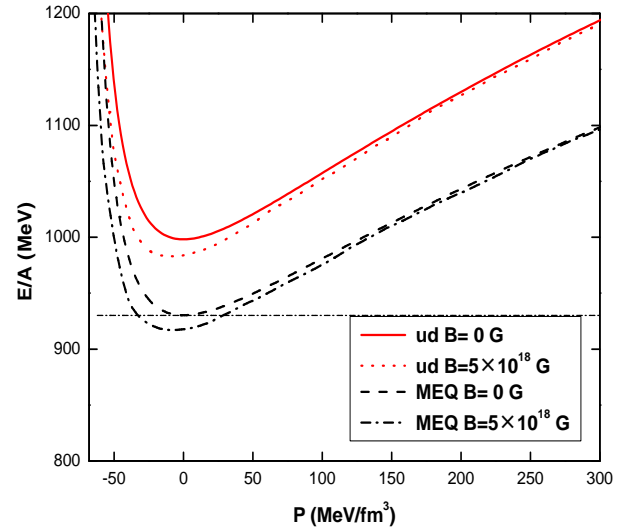


Figura 3.5: Energía por barión contra presión para $B = 0$ y $B = 5 \times 10^{18}$ G. Tomando $B_{\text{bag}} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$. La línea horizontal de puntos corresponde a $E/A|_{^{56}\text{Fe}} \simeq 930 \text{ MeV}$.

En la Fig (3.4) presentamos una comparación de la energía por barión E/A (equivalentemente ε/n_B) contra la densidad de partículas n_B/n_0 para $B = 0$ y $B = 5 \times 10^{18}$ G exigiendo la condición de equilibrio $P_{\perp} = 0$. Hemos asumido que $m_u = m_d = 5 \text{ MeV}$ y $m_s = 150 \text{ MeV}$ en todos los casos.

Como puede observarse en la figura E/A es menor cuando está presente el campo magnético. Para $B = 5 \times 10^{18}$ G obtenemos que $E/A \simeq 919 \text{ MeV}$, $n_B/n_0 \simeq 2,2$ y $B_{\text{bag}} \simeq 75 \text{ MeV fm}^{-3}$ mientras que para $B = 0$ e igual valor del Bag, $E/A \simeq 929 \text{ MeV}$, $n_B/n_0 \simeq 2,1$.

El comportamiento de E/A con la presión se muestra en la Fig (3.5) fijando $B_{\text{bag}} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$. Podemos notar que el punto de presión cero para la MEQM se alcanza para un valor de densidad de energía menor que en el caso de la MEQ. Por tanto la MEQ es más estable y más compacta en presencia de campo magnético.

Un estudio más detallado de la estabilidad lo podemos realizar a través de las ventanas de estabilidad, las cuales nos brindan una mayor información acerca de los límites para los parámetros entre los cuales se cumple la desigualdad de estabilidad (3.25). Para investigar cómo el campo magnético afecta estas ventanas, consideraremos las regiones de estabilidad en el plano (m_s, n_B) . Para ilustrar, fijaremos el campo magnético en el valor $B = 5 \times 10^{18}$ G, $B = 0$ G y estudiaremos los contornos $B_{\text{bag}} = \text{const}$ y $E/A = \text{const}$.

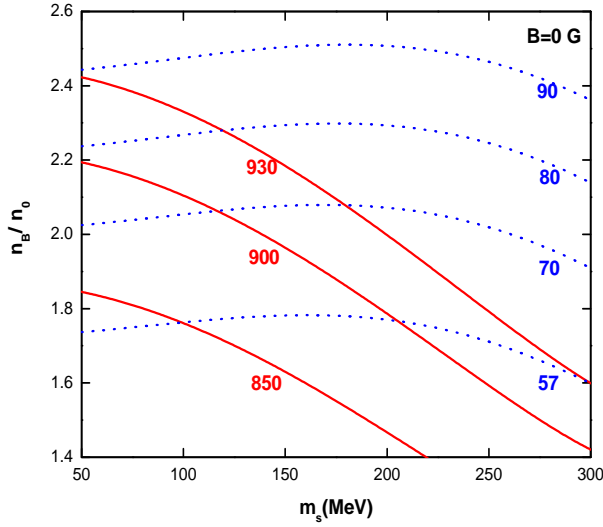


Figura 3.6: Ventanas de estabilidad para la MEQ en el plano (m_s, n_B) . Se muestran los contornos de $B_{bag} = const$ y $E/A = const$.

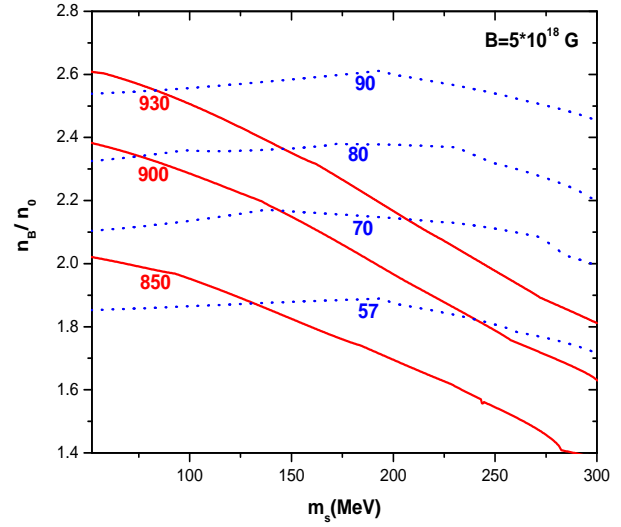


Figura 3.7: Ventanas de estabilidad para la MEQM en el plano (m_s, n_B) . Se muestran los contornos de $B_{bag} = const$ y $E/A = const$.

Estos resultados se presentan en las Fig (3.6) y Fig (3.7) para MEQ y MEQM respectivamente. Como puede observarse, el campo magnético hace que las ventanas de estabilidad para la MEQ se muevan hacia valores mayores de la densidad bariónica. Además se modifica el intervalo permitido de valores para el parámetro de Bag debido a que por debajo del contorno de energía de 930 MeV las EdE para MEQM corresponden a un valor de E/A a presión cero menor que el del ^{56}Fe ($\frac{E}{A}|_{MEQ}^B < \frac{E}{A}|_{^{56}\text{Fe}}$).

Del análisis de la Fig (3.7) podemos considerar la MEQM como absolutamente estable si $57 \text{ MeV fm}^{-3} < B_{bag} < 90 \text{ MeV fm}^{-3}$, $1,85 < n_B/n_0 < 2,6$ y para un amplio rango de masas del quark s , en particular para $m_s = 150 \text{ MeV}$ y $B_{bag} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$ valores que utilizaremos en el próximo capítulo para calcular algunos parámetros de las EQs.

Capítulo 4

Estrellas de Quarks magnetizadas.

4.1. Observables.

4.1.1. Relación Masa Radio y ecuaciones TOV.

En el capítulo anterior estudiamos la estabilidad y las EdE de un gas magnetizado de quarks. ¿Cómo podemos vincular esto con la curvatura en el espacio tiempo, causada por las enormes densidades de la materia en una EQs?

El problema se puede tratar separando la fuerza gravitacional que tiene un rango de acción infinito y las fuerzas fuertes de corto alcance. De esta manera en nuestro estudio anterior hemos considerado que en las escalas de las interacciones fuertes (~ 1 fm) la curvatura es nula, la gravitación no es necesaria incluirla.

Ahora bien, para las escalas de las EQs, (~ 10 km) no podemos obviar el papel de la curvatura, es decir, la gravedad curva el espacio tiempo a escalas macroscópicas [12].

Por esto para conocer la estructura (radio, masa) de una estrella es necesario utilizar la Teoría General de la Relatividad de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein establecen un estrecho vínculo entre el contenido de materia en un lugar del espacio y la curvatura del mismo [1]:

$$G^\mu{}_\nu = \kappa \mathcal{T}^\mu{}_\nu, \quad (4.1)$$

($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $\kappa = 8\pi G_N G_N = 1,32 \times 10^{-42} \text{ fm MeV}^{-1}$, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein el cual viene determinado por el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y por el escalar de Ricci $R = R^\mu{}_\mu$, estos últimos dependen de segundas derivadas de la métrica.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha, \quad (4.2)$$

las cantidades $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los índices de Christoffel, que dependen de primeras derivadas de la métrica por la fórmula,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (4.3)$$

El tensor energía impulso $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ viene dado por la expresión (3.17).

Para una estrella estática en equilibrio se emplea la métrica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.4)$$

Utilizando la métrica (4.4), la ecuación (4.1) y la ley de conservación de la energía ($\mathcal{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$) podemos encontrar las ecuaciones TOV [1], que nos dan las configuraciones de estrellas estáticas y con simetría esférica:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi G\epsilon(r) \quad (4.5a)$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\epsilon(r) + P(r))(M(r) + 4\pi P(r)r^3)}{r^2 - 2rM(r)} \quad (4.5b)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.5) utilizaremos las soluciones numéricas de las EdE para la MEQM (3.18) y (3.21). El radio R y la masa correspondiente M de la estrella se determinan imponiendo la condición de presión cero $P(R) = 0$. La presión central queda fijada por la EdE, $P(0) = P_c$, si imponemos además la condición $M(0) = 0$ podemos resolver el sistema de ecuaciones TOV.

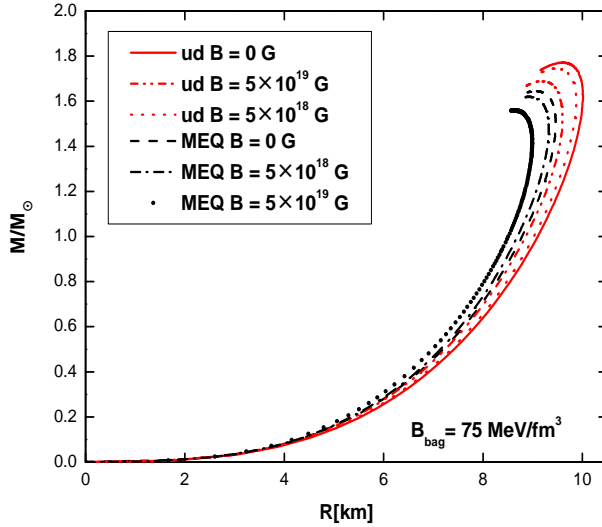


Figura 4.1: Configuraciones de $M - R$ obtenidas para MEQM. Se muestran curvas para diferentes valores de campo magnético B . Para compararse han añadido las gráficas $M - R$ para la materia de quarks normal. Las configuraciones más compactas son las de MEQM

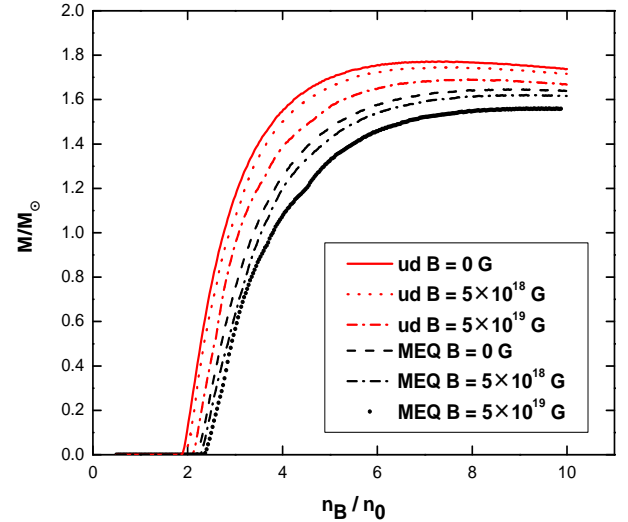


Figura 4.2: Masa contra densidad central para diferentes valores del campo magnético. Se muestran los resultados para el gas formado por u y d . Se puede observar que el aumento del campo tiende a hacer decrecer la masa máxima para una densidad fija.

En la Fig (4.1) mostramos los gráficos de las configuraciones de equilibrio para la MEQ y para la MEQM con un valor del parámetro de Bag ($B_{bag} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$). Como ya fue mencionado en el capítulo anterior, el campo magnético hace que la MEQ sea más estable por

lo que las estrellas pueden ser más compactas. Se observa como a medida que aumenta el campo las configuraciones obtenidas presentan menores radios.

La solución de las ecuaciones TOV (4.5) representadas en la Fig (4.1) dan las configuraciones de equilibrio para la estrella, pero este equilibrio puede ser estable o inestable.

Para conocer si una configuración es estable o inestable hay que estudiar la dependencia de la masa con densidad central de masa ρ_c (equivalentemente n_B) Fig (4.2). La estabilidad de la estrella puede determinarse por la pendiente de esta curva. Cuando $dM/d\rho_c < 0$ las configuraciones de equilibrio se consideran inestables [42].

En la Tabla 4.1 se muestran los valores de masa máxima con su correspondiente radio y densidad central para diferentes valores de campo obtenidos de la Fig (4.1) y Fig (4.2).

Materia	$M_{max} (M/M_\odot)$	R (km)	B (G)	n_{Bc}/n_0
MEQM	1.56	8.62	1×10^{19}	9.46
MEQM	1.62	8.91	5×10^{18}	9.14
MEQ	1.65	9.07	0	8.48
ud	1.69	9.20	1×10^{19}	7.88
ud	1.74	9.50	5×10^{18}	7.31
ud	1.77	9.60	0	7.02

Tabla 4.1: Resultados obtenidos de la Fig (4.1).

4.1.2. Masa Bariónica.

La masa que encontramos en el epígrafe anterior al resolver las ecuaciones TOV (4.5) es la masa gravitacional (M_G). Hallemos ahora la masa bariónica [43]. Ella difiere de la gravitacional porque vamos a considerar que la densidad bariónica depende de la métrica.

Para hallarla tengamos en cuenta que el volumen de una capa esférica de la estrella en la métrica de Schwarzschild está dada por la expresión:

$$dV = \frac{4\pi r^2 dr}{[1 - \frac{2G_N m}{r^2}]^{1/2}}, \quad (4.6)$$

el número de bariones dentro de la estrella lo podemos calcular como:

$$N_B = \int n(r) dV = \int_0^R \frac{4\pi r^2 dr}{[1 - \frac{2G_N m}{r^2}]^{1/2}} \quad (4.7)$$

donde $n(r)$ es el número de bariones por unidad de volumen. Por tanto la masa bariónica de la estrella es:

$$M_B = m_n \cdot N_B. \quad (4.8)$$

Se toma m_n como la masa bariónica $m_n = 939 \text{ MeV}$.

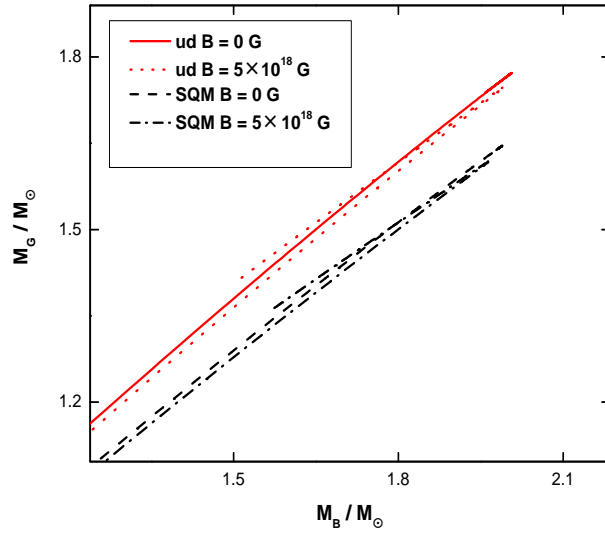


Figura 4.3: Masa bariónica contra masa gravitacional.

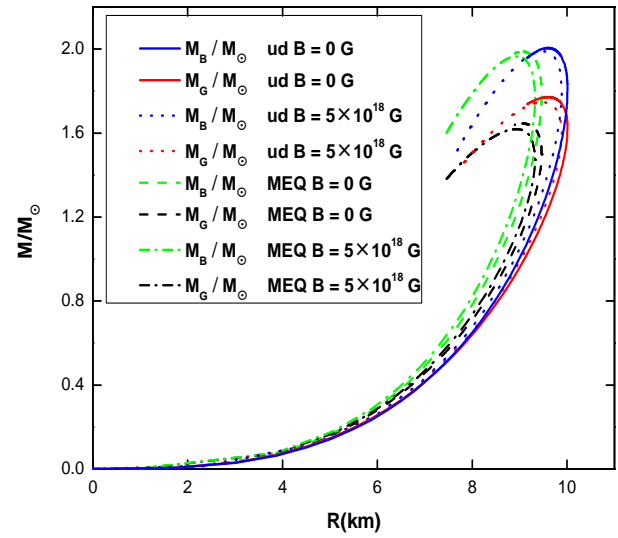


Figura 4.4: Masa bariónica contra radio.

La Fig (4.3) muestra la masa gravitatoria en función de la masa bariónica. La Fig (4.4) representan las configuraciones de equilibrio de masa bariónica y radios. Como se puede observar la masa bariónica es siempre superior a la masa gravitacional. La estabilidad puede ser estudiada de la misma manera en que se analiza la estabilidad para la masa gravitacional [42]. Podemos apoyarnos en la Fig (4.3) que como se puede observar alcanza un máximo y luego comienza a decrecer hacia menores valores de masa bariónica, esta es la zona de inestabilidad.

4.1.3. Corrimiento al rojo gravitacional.

El corrimiento al rojo se define como:

$$1 + z = \frac{f_{\text{(receptor)}}}{f_{\text{(fuente)}}} \Rightarrow 1 + z = \sqrt{\frac{g_{tt}(\text{receptor})}{g_{tt}(\text{fuente})}} \quad (4.9)$$

donde g_{tt} es la componente temporal de la métrica.

Esta magnitud da la diferencia de frecuencia de la luz emitida por la superficie de la estrella con respecto a la que se mide en un sistema en reposo respecto a la fuente. En este caso estamos interesados en el corrimiento al rojo gravitacional, es decir, el cambio de frecuencia que sufre la radiación al moverse en un campo gravitatorio muy intenso como el que existe en las EQs.

Para el caso de la métrica (4.4) se puede obtener que [42]:

$$z_s = \frac{1}{\sqrt{1 - 2G_N M/R}} - 1 \quad (4.10)$$

El corrimiento al rojo se utiliza para descartar EdE que no reproduzcan los datos observados. En la Fig (4.5) mostramos los resultados del corrimiento al rojo gravitacional. El valor de

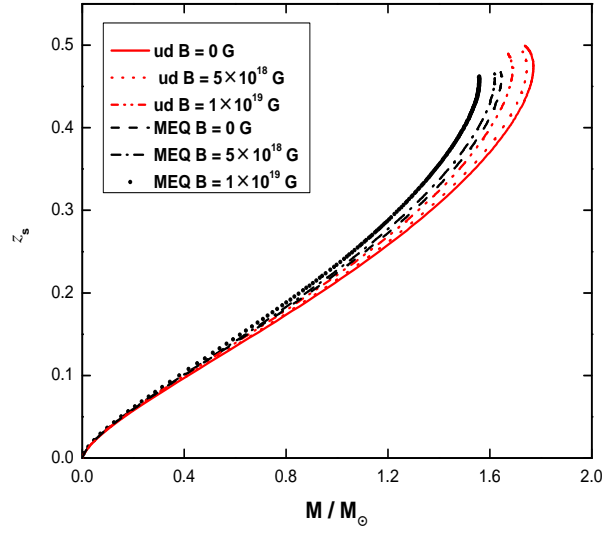


Figura 4.5: Corrimiento al rojo gravitacional para distintos valores de campo magnético y $B_{bag} = 75 \text{ MeV fm}^{-3}$.

$z_s \simeq 0,345$ obtenido experimentalmente en las líneas espectrales de rayos X proveniente del objeto EXO 0748-676 se corresponderá en nuestro caso con valores de $M/M_\odot \simeq 1,42$ resultado que está dentro de los límites de masas medidas experimentalmente.

Conclusiones.

En esta tesis se “tiende el puente” entre el estudio microscópico de la materia de quarks magnetizada (dado por el estudio de las EdE y la estabilidad) y los observables macroscópicos de las EQs derivados de las EdE de ese tipo de materia magnetizada.

El estudio se hace tanto para la MEQ, como para la normal en equilibrio estelar en presencia de un campo magnético intenso, utilizando el modelo fenomenológico de Bag del MIT.

La estabilidad se ha estudiado con el propósito de conocer si el campo magnético contribuye o no a que sea más estable la materia de quarks. Las EdE se han obtenido para utilizarlas al resolver las ecuaciones de equilibrio hidrodinámico TOV y obtener cómo los observables (masa gravitacional, radios y corrimiento al rojo), se modifican con el campo magnético.

Los resultados obtenidos pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Se obtuvo numéricamente la EdE para la MEQM Fig (3.3) y para la materia normal de quarks en equilibrio estelar.
2. Se estudió la estabilidad de la MEQM en equilibrio estelar:
 - Se verificó que las desigualdades de estabilidad (3.25) se cumplen para un amplio rango de parámetros de modelo de Bag.
 - La MEQM es más estable que la MEQ y que la materia de quarks normal.
 - Se obtuvieron las ventanas de estabilidad: curvas en el plano n/n_B contra m_s de la MEQM teniendo en cuenta la variación de la masa del quark s , la densidad bariónica, el campo magnético y el parámetro de Bag.
 - Mientras que para la MEQ el rango de la densidad bariónica permitido está entre $1,8 \lesssim n_B/n_0 \lesssim 2,4$ para masas del quark s en el rango $50 \leq m_s \leq 300 \text{ MeV}$, la MEQM admite densidades en el rango $1,85 \lesssim n_B/n_0 \lesssim 2,6$ para rangos de la m_s $50 \leq m_s \leq 300 \text{ MeV}$ y campo magnético de $5 \times 10^{18} \text{ G}$. El rango del parámetro de Bag es $57 \lesssim B_{bag} \lesssim 90 \text{ MeV fm}^{-3}$.
3. Se resolvieron las ecuaciones TOV con las EdE obtenidas. La relación masa-radio (MR) muestra como el campo magnético contribuye a soluciones estables de EQs más compactas con menores valores de masa gravitacional y radio.
 - Se obtuvo los efectos del campo magnético en la masa bariónica. Se resolvieron las ecuaciones TOV para ella y se obtuvieron las relaciones masa bariónica en función del radio.

- Se estudió el corrimiento al rojo de las EQs magnetizadas.

Recomendaciones.

Estudios teóricos recientes han mostrado que a densidades muy altas la materia de quarks podría estar en una fase superconductora de color: *Color Flavor Locked* (CFL) siendo éste el estado fundamental de la materia [44]. Estudiar como influye la presencia del campo magnético en la estabilidad de esta fase resulta un tema relevante que ya hemos emprendido.

Por otro lado los observables astrofísicos aquí discutidos merecen que sean comparados con datos observacionales. Es esta otra dirección de trabajo en que pensamos dirigir nuestros esfuerzos. Estudiar otros observables como el momento de inercia de la estrella es también algo que ha quedado pendiente.

La inclusión de los efectos de la rotación de las EQs es un tema digno de analizarse, los efectos del campo magnético pueden en este caso resultar importantes.

Bibliografía

- [1] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John. Archibald Wheeler, *Gravitation*, ed W.H. Freeman and Company, NY (1973).
- [2] G. Baym, AIP Conf. Proc. **892**, 8 (2007) [arXiv:nucl-th/0612021].
- [3] S. L. Shapiro & S. A. Teukolsky, 1983, Black Holes , White Dwarfs and Neutron Stars (New York: John Wiley & Sons).
- [4] J. M. Lattimer and M. Prakash, Science **304**, 536 (2004) [arXiv:astro-ph/0405262].
- [5] I. Bombaci, arXiv:0809.4228 [gr-qc].
- [6] J. Schaffner-Bielich, J. Phys. G **31**, S651 (2005) [arXiv:astro-ph/0412215].
- [7] D. P. Roy, arXiv:hep-ph/9912523.
- [8] Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics Vol 33 July 2006 Pp 1-1232 (Complete volume) Review of particle Physics
- [9] A. R. Bodmer, Phys. Rev. D **4**, 1601 (1971).
- [10] E. Witten, “Cosmic Separation Of Phases,” Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).
- [11] J. M. Lattimer and M. Prakash, Phys. Rept. **442**, 109 (2007) [arXiv:astro-ph/0612440].
- [12] For a recent review on strange quark matter and compact stars see : F. Weber, Prog. Part. Nucl. Phys. **54**, 193 (2005).
- [13] R. González Felipe, A. Pérez Martínez, H. Pérez Rojas and M. G. Orsaria, Phys. Rev. C **77**, 015807 (2008).
- [14] R. González Felipe, A. Pérez Martínez, J. Phys. G **36**, 075202 (2009).
- [15] A. Perez Martinez, H. Perez Rojas, H. J. Mosquera Cuesta, M. Boligan and M. G. Orsaria, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 1959 (2005) [arXiv:astro-ph/0506256].
- [16] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

- [17] S. B. Ruester, arXiv:nucl-th/0612090.
- [18] R. C. Duncan & C. Thompson, ApJL **392**, L9 (1992),
- [19] R. C. Duncan & C. Thompson, ApJ **469**, 764 (1996)
- [20] J. M. Lattimer and M. Prakash. *Astrophys. J.* 550 (2001) 426. **304**, 536 (2004)
- [21] A. Perez Martinez, H. Perez Rojas, H. Mosquera Cuesta. *Chin. Phys. Lett.* Vol 21 No. **11** (2004) 2117-2119.
- [22] N. Itoh, Prog. Theor. Phys. **44**, 291 (1970).
- [23] V. V. Usov, Phys. Rev. Lett. **87**, 021101 (2001).
- [24] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott & R. A. Collins, Nature **217**, 709 - 713 (1968)
- [25] T. Gold, Nature **221**, 25 - 27 (1969)
- [26] J. J. Drake *et al.*, Astrophys. J. **572**, 996 (2002) [arXiv:astro-ph/0204159].
- [27] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, ASP Conf. Ser. **328**, 25 (2005) [arXiv:astro-ph/0407149].
- [28] R. X. Xu and G. J. Qiao, arXiv:astro-ph/0108235.
- [29] R. X. Xu, Chin. J. Astron. Astrophys. **3**, 33 (2003) [arXiv:astro-ph/0211214].
- [30] J. E. Trumper, V. Burwitz, F. Haberl and V. E. Zavlin, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **132**, 560 (2004) [arXiv:astro-ph/0312600].
- [31] F. Ozel, arXiv:astro-ph/0605106.
- [32] R. Xu, AIP Conf. Proc. **968**, 197 (2008) [arXiv:0709.1305 [astro-ph]].
- [33] M. Buballa, NJL-model analysis of dense quark matter, [arXiv:hep-ph/0402234v2] 27 Jan. 2005.
- [34] R. Xu, J. Phys. G **36**, 064010 (2009) [arXiv:0812.4491 [astro-ph]].
- [35] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 3471.
- [36] J. Madsen, Phys. Rev. Lett. **85**, 10 (2000). [arXiv:astro-ph/9912418].
- [37] A. Schmitt, arXiv:1001.3294 [astro-ph.SR].
- [38] S. Chakrabarty, Phys. Rev. D **54**, 1306 (1996).

- [39] Course of theoretical Physics. Statistical Physics p.I y p.II L. D. Landau & E. M. Lifshitz. Pergamon International Library.
- [40] Carlos Rodríguez Castellanos, María Teresa Pérez Maldonado, Introducción a la Física Estadística, ed Félix Varela, La Habana (2002).
- [41] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, *Exact solutions of relativistic wave equations* (Kluwer Academic Publ (1990).
- [42] Steven Weinberg, 1972, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (New York: John Wiley & Sons).
- [43] I. Bombaci, Astron.& Astrophys. **305**, 871-877 (1996)
- [44] K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **86**, 3492 (2001).